# インターネット望遠鏡を使った小惑星の軌道決定

山本　裕樹

東北公益文科大学総合研究論集第30号 抜刷

2016年7月20日発行

研究ノート

# インターネット望遠鏡を使った小惑星の軌道決定

山本　裕樹

## 1　はじめに

インターネット望遠鏡とは、遠隔地に設置した無人の天体望遠鏡をインターネットを通じて操作し天体観測を行うためのシステムである。筆者らは「慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクト」として2003年からインターネット望遠鏡の運用を行っている[1][2]。インターネットが使える環境とブラウザがあれば誰でも無料でインターネット望遠鏡を利用できる。

インターネット望遠鏡の目的の一つは、小学校・中学校・高等学校などの教育現場で現在はほとんど行われていない天体観測を重視した天文教育のための環境作りにある。望遠鏡を持っていなかったり、使ったことがなくても、誰でも比較的簡単に天体観測ができるだけでなく、自らの観測で物理法則の確認や物理量の計算ができるのは、天文教育におけるインターネット望遠鏡の大きなメリットである。

インターネット望遠鏡を利用した天文教育の実践活動として、筆者は2011年度から山形県立鶴岡南高等学校における2年生を対象にした探求活動「鶴南ゼミ」においてインターネット望遠鏡を使った研究指導を行っている。同校は2012年度から文部科学省のスーパーサイエンスハイスクール指定校であり、理数教育に特に力を入れている。

2015年度の鶴南ゼミの研究テーマは「インターネット望遠鏡を用いた小惑星パルテノーペの軌道要素の計算」であった。小惑星パルテノーペ（Parthenope）を横須賀の防衛大学校に設置されたインターネット望遠鏡で観測し、その観測画像から小惑星の位置を測定して軌道要素を計算するというものである。本研究では、そのゼミで行った研究を元に、さらに小惑星Junoの観測を加えて軌道決定についての分析を行った。

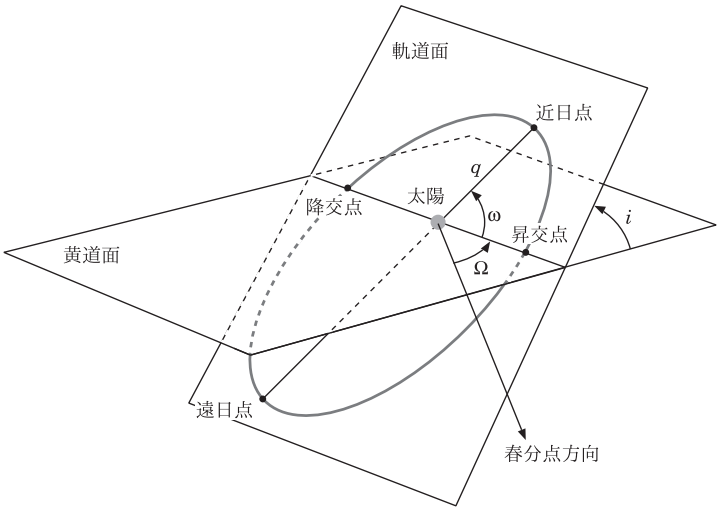


**図1　楕円軌道の軌道面と軌道要素**

## 2　軌道決定の方法

惑星、彗星、小惑星など太陽を回る天体の運動の軌道は、太陽とその天体の2体問題とすると、軌道要素と呼ばれるパラメータによって決まる。軌道要素とは離心率$e$、近日点距離$q$、軌道傾斜角$i$、昇交点黄経$\Omega$、近日点引数$\omega$、近日点通過時刻$t_0$の6つのパラメータから成る（図1参照）。天体の軌道を決めるということは、これらの軌道要素を求めることといえる。軌道要素は目的の天体を異なる時刻に3回観測して得られた視位置の赤経・赤緯から原理的に求めることができる。以降、本稿で用いる赤経・赤緯は視位置のものである。

観測データからの軌道決定はFind_Orb[*1]、OrbitLife[*2]、OrbFit[*3]などの専用ソフトウェアを使えば簡単にできるが、それではブラックボックスに近いため、鶴南ゼミでは自ら観測したデータからExcelを使って軌道要素の計算を行うことにした。

---

[*1] http://www.projectpluto.com/find_orb.htm
[*2] http://comet-web.net/mira/OrbitLife/about_orbitlife.html
[*3] http://adams.dm.unipi.it/orbfit/

小惑星の軌道決定の手順は以下の通りである。

1．インターネット望遠鏡で目的の小惑星を複数回観測する。
2．観測画像から小惑星の赤経・赤緯を測定する。
3．3回分の観測データから軌道要素を計算する。

各手順について詳しく述べる。

## 2.1　小惑星の観測

インターネット望遠鏡で小惑星を観測する手順は以下の通りである。

1．セレクタウィンドウの［スライド］から「サブスコープ」を選択する。
2．星図ウィンドウの［等級］で「全て」を選択する。
3．星図ウィンドウの［太陽系］で目的の小惑星名を選択し、星図を描画する。［太陽系］に目的の小惑星名がない場合でも、［太陽系］に小惑星名を直接入力することで星図を描画できる場合がある。
4．星図ウィンドウの［導入］ボタンをクリックして目的の小惑星を導入する。
5．スライドウィンドウの画像に天体が映るようにサブスコープの感度と露出時間を調整する。
6．スライドウィンドウの画像と星図を見比べて、目的の小惑星が中心に来るようにスライドウィンドウのクリックセンタリングで望遠鏡の方向を微調整する。
7．スライドウィンドウをダブルクリックしてキャプチャウィンドウを表示する。表示された画像を保存する。

この一連の操作を観測のたびに行って観測画像を蓄積していく。最低でも3回の異なった日時の観測画像が必要である。

## 2.2　赤経・赤緯の測定方法

小惑星の赤経・赤緯を測定するには、観測画像の平面座標から天球上の赤経・赤緯への変換が必要である。観測画像上にとった直交座標系で天体の位置（ピクセル単位）を（$x,y$）とすると、これから天球上の赤経・赤緯（$\alpha,\delta$）に変

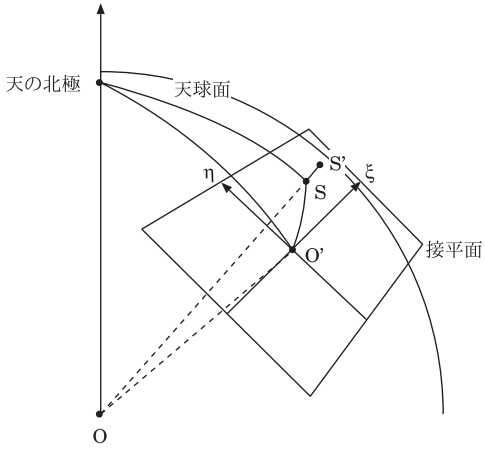


図2　標準座標

換する式を作れば、画像上の任意の位置から赤経・赤緯への変換ができるようになる。そのためには観測画像に写っている小惑星の周りの恒星の赤経・赤緯が既知であることを利用する。ここで変換に利用する恒星を基準星という。

変換には中間的な座標である標準座標$(\xi,\eta)$を媒介して$(x,y)\rightarrow(\xi,\eta)\rightarrow(\alpha,\delta)$という変換順序で行った[3]。標準座標とは、点Oを中心とする天球において、天球上のある点O'$(\alpha_c,\delta_c)$の接平面を考え、天球上の天体S$(\alpha,\delta)$を点Oからその接平面に投影した点S'$(\xi,\eta)$の位置を表す座標である（図2参照）。標準座標は

$$\xi=\frac{\cos\delta\sin(\alpha-\alpha_c)}{\sin\delta\sin\delta_c+\cos\delta\cos\delta_c\cos(\alpha-\alpha_c)},\tag{1}$$

$$\eta=\frac{\sin\delta\cos\delta_c-\cos\delta\sin\delta_c\cos(\alpha-\alpha_c)}{\sin\delta\sin\delta_c+\cos\delta\cos\delta_c\cos(\alpha-\alpha_c)},\tag{2}$$

という式で赤経・赤緯と関係付けられる。逆変換は

$$\alpha=\alpha_c+\tan^{-1}\left(\frac{\xi}{\cos\delta_c-\eta\sin\delta_c}\right),\tag{3}$$

$$\delta=\sin^{-1}\left(\frac{\sin\delta_c+\eta\cos\delta_c}{\sqrt{1+\xi^2+\eta^2}}\right),\tag{4}$$

である。今回は$\delta_c$が0に近く、観測に用いたサブスコープの画角が狭い

$(|\xi|,|\eta| \ll 1)$ ため、

$$\alpha \simeq \alpha_c + \frac{\xi}{\cos\delta_c}, \tag{5}$$

$$\delta \simeq \delta_c + \eta, \tag{6}$$

と近似した。

点O'の接平面は観測画像と平行な面と見なせるが、標準座標（$\xi,\eta$）と観測画像上の直交座標（$x,y$）は比率や回転だけの単純な関係ではなく、観測装置の誤差など様々な要因が影響する。しかし、ここで必要なのは画像上の位置から天球上の赤経・赤緯への変換式だけなので、そのような要因を一つ一つ考えることはせず、単純に直交座標と標準座標の間には何らかの多項式の関係

$$\xi = x + a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2, \tag{7}$$

$$\eta = y + b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2, \tag{8}$$

があるとして、基準星の画像上での位置と天球上の赤経・赤緯を用いて、最小二乗法により未知の係数$a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6$を推定した。最小二乗法による赤経・赤緯の分散はそれぞれ

$$\sigma_\alpha^2 = \frac{1}{n-6}\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k - \hat{\alpha}_k)^2, \tag{9}$$

$$\sigma_\delta^2 = \frac{1}{n-6}\sum_{k=1}^{n}\left(\delta_k - \hat{\delta}_k\right)^2, \tag{10}$$

である。ここで$n$は基準星の数、（$\alpha_k,\delta_k$）は$k$番目の基準星の赤経・赤緯、（$\hat{\alpha}_k,\hat{\delta}_k$）は画像上の$k$番目の基準星の位置（$x_k,y_k$）を式(5)～(8)に代入して得られた推定値である。

未知の係数は式(7),(8)でそれぞれ6個のため、推定に用いる基準星の数も6個より多くなくてはならない。実際の推定には8個の基準星（$n=8$）を用いた。基準星の選び方で推定値が変わるので、なるべく$\sigma_\alpha,\sigma_\delta$が小さくなる組み合わせで選んだ。式(7),(8)は$x,y$のさらに高次の項を加えることで補正することもできるが、それに伴って基準星の数も増やさなくてはならないため、あまり明るい恒星がない領域だと難しくなる。

基準星の視位置における赤経・赤緯は、ステラナビゲータ9[*4]を用いた。基

[*4] http://www.astroarts.co.jp/products/stlnav9/

準星として10等級より暗い恒星も使わないと足りないため、星表としてTycho-2カタログを用いた。インターネット望遠鏡は赤道儀を使用しているので、表示モードを赤道座標にした方が見やすい。Sky Chart/Cartes du Ciel[*5]などの他のプラネタリウムソフトを使用してもよいが、途中で別のソフトに切り替えるのは避けるべきである。

点O'は画像中心であることが望ましいが、画像中心でなくとも式(7),(8)の係数でその差はある程度吸収できるため、$(\alpha_c, \delta_c)$には基準星の赤経・赤緯の平均を用いた。

天体の観測画像上の位置測定にはステライメージ7[*6]を用いた。恒星や小惑星をインターネット望遠鏡で観測すると光学系の収差や大気による影響などで像がぼやけて広がって写る。ステライメージの測光機能を使うと、像の広がりから自動的に重心位置を小数第一位まで求められる。また、他にマカリ[*7]にも同様の機能がある。

以上で推定した変換式を用いて、小惑星の画像上の位置から赤経・赤緯を求めた。

### 2.3　軌道要素の計算方法

軌道決定の方法は現在まで様々な方法が考案されており、特に小惑星の軌道決定についてはGaussの方法が有名である[4][5]。1801年にイタリアの天文学者G. Piazziによって小惑星Ceresが発見された。しばらくして、Ceresは地上から見て太陽に近くなったため観測できなくなったが、ドイツの数学者C. F. GaussがCeresの軌道決定の計算を行い、一度は見失ったCeresを再発見することができた。

鶴南ゼミではGaussの方法は使用せず、数値計算で使いやすい長沢の方法[6]を使用した。これは直接法とよばれる方法の一つで、小惑星の座標を観測時刻の時刻差でテイラー展開し、太陽の万有引力を受ける小惑星の運動方程式を使うものである。必要最低限の計算式は付録Aに記載した。軌道決定に必

---

*5 https://www.ap-i.net/skychart/start
*6 http://www.astroarts.co.jp/products/stlimg7/
*7 http://makalii.mtk.nao.ac.jp/

要な観測データは3回の観測における観測時刻$t_i$、日心赤道直交座標系の観測地の座標（$X_i, Y_i, Z_i$）、小惑星の赤経・赤緯（$\alpha_i, \delta_i$）である（$i=1,2,3$）。

日心赤道直交座標系の観測地の座標は、簡単のためにステラナビゲータから求めた。ステラナビゲータでは観測地の座標は表示されないが、観測地と観測時刻を設定したのちに太陽の測心距離$d_S$、視位置の赤経・赤緯（$\alpha_S, \delta_S$）を調べて

$$X = -d_S \cos\alpha_S \cos\delta_S, \tag{11}$$
$$Y = -d_S \sin\alpha_S \cos\delta_S, \tag{12}$$
$$Z = -d_S \sin\delta_S, \tag{13}$$

から求めることができる。他にSky Chart/Cartes du CielやJPL HORIZONS system[*8]などを使っても同様にできる。

## 3　観測と解析

### 3.1　小惑星Parthenopeの観測

2015年度の鶴南ゼミでは小惑星Parthenopeの観測を行った。インターネット望遠鏡は横須賀の防衛大学校に設置したものを利用した。天候に恵まれなかったり、装置のトラブルなどであまり多くの観測は行えなかったが、計5回の観測を行うことができた。図3は2015年5月22日の観測画像で、TYCの番号がついているのはTycho-2カタログに収録されている恒星で基準星として選んだものである。表1が観測データで、観測時刻$t_i$のUTCは協定世界時、JDはユリウス日である。表2はそれぞれの観測における観測地の座標である。

5回の観測データのうち、3回を選んで長沢の方法で軌道要素を計算した。結果は表3の通りである。表の1列目は$i=2,3,4$の観測データから得られた軌道要素、2列目は$i=1,4,5$の観測データから得られた軌道要素、3列目はJPL Small-Body Database Browser（JPL SBDB）[7]の軌道要素の文献値である。また、時刻差は$t_{ij}=t_i-t_j$である。

[*8] http://ssd.jpl.nasa.gov/horizons.cgi

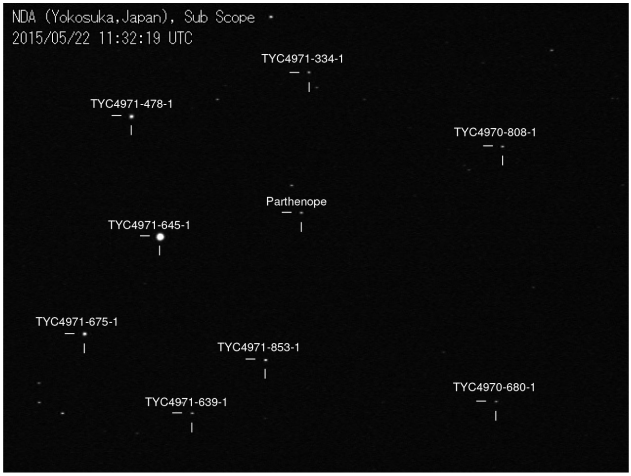


図3　小惑星Parthenopeの観測画像（2015/5/22 11:32:19 UTC）

表1　小惑星Parthenopeの観測データ（2015年）

| $i$ | $t_i$ (UTC) | $t_i$ (JD) | $\alpha_i$ [度] | $\delta_i$ [度] | $\sigma_{\alpha,i}$ [度] | $\sigma_{\delta,i}$ [度] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5/22 11:32:19 | 2457164.98078 | 207.94489 | −3.71905 | 0.00013 | 0.00016 |
| 2 | 5/25 15:55:51 | 2457168.16378 | 207.51031 | −3.66900 | 0.00017 | 0.00013 |
| 3 | 5/26 13:54:17 | 2457169.07936 | 207.39662 | −3.66018 | 0.00009 | 0.00008 |
| 4 | 5/27 11:58:06 | 2457169.99868 | 207.28898 | −3.65473 | 0.00011 | 0.00013 |
| 5 | 6/25 12:47:47 | 2457199.03318 | 206.72051 | −4.70305 | 0.00012 | 0.00010 |

$i=2, 3, 4$ から得られた軌道要素は、JPL SBDBの軌道要素に比べてかなり外れた値になった。それに対し、$i=1, 4, 5$ から得られた軌道要素は、JPL SBDBの軌道要素に近い値である。$i=2, 3, 4$ は時刻差が最も小さいほぼ1日おきの組み合わせで、$i=1, 4, 5$ は時刻差が最も大きい組み合わせである。

### 3.2　小惑星Junoの観測

筆者は2016年に横須賀のインターネット望遠鏡を利用して小惑星Junoを計7回観測した。図4は2016年4月7日の観測画像である。表4は観測データ、表

表2　日心赤道直交座標系における横須賀の座標（2015年）

| $i$ | $X_i$ [AU] | $Y_i$ [AU] | $Z_i$ [AU] |
|---|---|---|---|
| 1 | −0.489649 | −0.812917 | −0.352336 |
| 2 | −0.441882 | −0.836245 | −0.362438 |
| 3 | −0.427923 | −0.842495 | −0.365149 |
| 4 | −0.413802 | −0.848561 | −0.367786 |
| 5 | 0.064941 | −0.930734 | −0.403395 |

表3　小惑星Parthenopeの軌道要素

| | $i=2,3,4$ | $i=1,4,5$ | JPL SBDB [7]<br>元期 2016/1/13 |
|---|---|---|---|
| $e$ | 0.66894 | 0.08829 | 0.10024 |
| $q$ [AU] | 1.52431 | 2.21695 | 2.20671 |
| $i$ [度] | 3.96994 | 4.63110 | 4.62985 |
| $\Omega$ [度] | 120.34257 | 126.05113 | 125.56669 |
| $\omega$ [度] | 167.47956 | 201.69519 | 196.00474 |
| $t_0$ (JD) | 2457277.98162 | 2457539.90502 | 2457515.51444 |
| 時刻差 [day] | $t_{32}=0.91558$<br>$t_{43}=0.91932$ | $t_{41}=5.01791$<br>$t_{54}=29.03450$ | |

5は観測地の座標である。

7回の観測データのうち、3回を選んで長沢の方法で軌道要素を求めた。結果は表6の通りである。表の1列目は$i=3,4,5$の観測データから得られた軌道要素、2列目は$i=1,2,7$の観測データから得られた軌道要素、3列目は$i=1,6,7$の観測データから得られた軌道要素、4列目はJPL SBDBの軌道要素である。

他の観測データの組み合わせも試してみたが、傾向としては時刻差が大きいほどJPL SBDBの軌道要素に近くなった。考えられるのは、時刻差が小さいほど画像を使った位置測定の精度が大きく効いてくるということである。小惑星は楕円軌道であり、その楕円軌道上の観測した小惑星の位置が近ければ、弧の短い部分で軌道要素を求めなくてはならず、それだけ位置測定の精度が必要になるはずである。

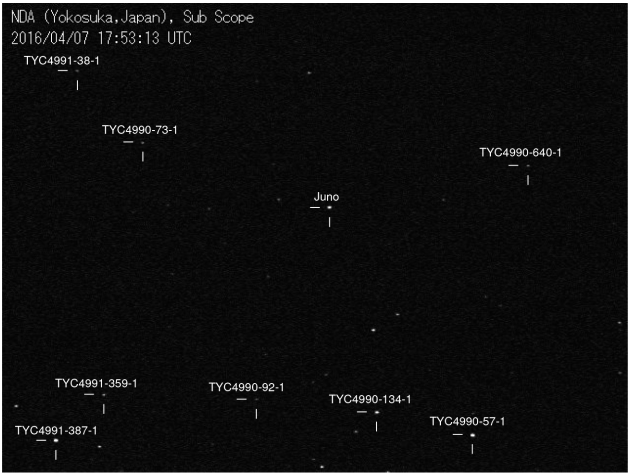


図 4　小惑星 Juno の観測画像（2016/4/7 17:53:13 UTC）

表 4　小惑星 Juno の観測データ（2016 年）

| $i$ | $t_i$ (UTC) | $t_i$ (JD) | $\alpha_i$ [度] | $\delta_i$ [度] | $\sigma_{\alpha,i}$ [度] | $\sigma_{\delta,i}$ [度] |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4/ 7 17:53:13 | 2457486.24529 | 222.98622 | −3.01772 | 0.00006 | 0.00014 |
| 2 | 4/ 9 13:40:57 | 2457488.07010 | 222.68991 | −2.80467 | 0.00013 | 0.00007 |
| 3 | 4/12 12:36:43 | 2457491.02550 | 222.18281 | −2.46119 | 0.00018 | 0.00018 |
| 4 | 4/14 12:04:31 | 2457493.00314 | 221.82892 | −2.23398 | 0.00019 | 0.00014 |
| 5 | 4/16 13:21:02 | 2457495.05627 | 221.45037 | −2.00117 | 0.00011 | 0.00012 |
| 6 | 4/19 18:28:38 | 2457498.26988 | 220.83952 | −1.64090 | 0.00002 | 0.00004 |
| 7 | 4/29 14:27:28 | 2457508.10252 | 218.88776 | −0.62421 | 0.00008 | 0.00011 |

## 4　まとめ

インターネット望遠鏡による小惑星 Parthenope と Juno の観測から長沢の方法による軌道決定を行った。軌道決定に必要な3回の観測において、時刻差が小さいほど位置測定の精度が求められるため、時刻差はある程度大きい方がよいことが分かった。しかし、長沢の方法はテイラー展開による時刻差の高次の項を落とす近似を行っているため、あまり時刻差が大きいと近似が悪くなると

表5　日心赤道直交座標系における横須賀の座標（2016年）

| $i$ | $X_i$ [AU] | $Y_i$ [AU] | $Z_i$ [AU] |
|---|---|---|---|
| 1 | −0.950418 | −0.289091 | −0.125272 |
| 2 | −0.940600 | −0.316379 | −0.137111 |
| 3 | −0.922701 | −0.359939 | −0.155991 |
| 4 | −0.909409 | −0.388568 | −0.168407 |
| 5 | −0.894503 | −0.417835 | −0.181086 |
| 6 | −0.868942 | −0.462592 | −0.200473 |
| 7 | −0.775061 | −0.590278 | −0.255825 |

表 6　小惑星 Junoの軌道要素

| | $i=3,4,5$ | $i=1,2,7$ | $i=1,6,7$ | JPL SBDB [7]<br>元期 2016/1/13 |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | 0.25812 | 0.24085 | 0.25370 | 0.25627 |
| $q$ [AU] | 2.02830 | 2.02181 | 1.99498 | 1.98559 |
| $i$ [度] | 12.72479 | 12.74475 | 12.94996 | 12.98987 |
| $\Omega$ [度] | 169.14998 | 169.11045 | 169.94280 | 169.86256 |
| $\omega$ [度] | 263.30769 | 247.28591 | 249.24822 | 248.29398 |
| $t_0$ (JD) | 2456928.94169 | 2456839.27808 | 2456857.74826 | 2456854.04404 |
| 時刻差 [day] | $t_{43}=1.97764$<br>$t_{54}=2.05314$ | $t_{21}=1.82481$<br>$t_{72}=20.03230$ | $t_{61}=12.02459$<br>$t_{76}=9.83252$ | |

いう問題もある。

観測に用いたインターネット望遠鏡のサブスコープは、非冷却のモノクロCCDカメラであり、出力はJPEG画像なので、サブスコープの観測画像による位置測定ではこれ以上の精度は難しい。メインスコープで観測すると解像度は良くなるが、画角が狭くなって基準星を見つけるのが困難になる。

今回の観測は観測期間が短く、本格的な軌道決定としての精度は不十分であったが、長期間の観測で精度を上げていくことはできると考える。長期間の観測を行って多くの観測データを用いた統計的な軌道改良を行い、さらに、光行差や惑星に近いときは惑星の重力の影響を取り入れる必要もある。

小惑星Parthenopeの観測と軌道要素の計算は2015年度の鶴南ゼミの研究テ

ーマとして取り組んだ。Gaussの方法でも長沢の方法でも計算原理が分かりづらく、高校2年生にとっては理系であっても理解するのは大変難しいと感じた。高校生が取り組むテーマとしては、まずはPhilomelaのように円軌道に近い小惑星を選んで単純化して考えた方がよさそうである。

## 謝辞

山形県立鶴岡南高等学校の友野抗氏には鶴南ゼミにおける指導で毎年お世話になっている。鶴南ゼミの地学テーマを選択した生徒達は観測や研究のみならず、サイエンスアゴラ2015におけるポスター発表も立派にこなしてくれた。防衛大学校の迫田誠治氏には同校のインターネット望遠鏡の設置にご尽力いただいた。また、慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクトのメンバーにもご助力いただいた。以上の皆様には感謝申し上げます。本研究はJSPS科研費15559449の助成を受けたものである。

## 付録A 長沢の方法

ここでは3回の観測から小惑星の軌道要素を計算するための長沢の方法[6]を天下り的ではあるが記載しておく。

3回の観測において、観測の時刻を$t_1, t_2, t_3$（$t_1 < t_2 < t_3$）とし、それぞれの時刻における小惑星の赤経・赤緯を（$\alpha_i, \delta_i$）、観測地の座標を日心赤道直交座標で（$X_i, Y_i, Z_i$）とする（$i = 1, 2, 3$）。これらは全て既知とする。

小惑星の軌道要素を求めるためには、それぞれの観測時刻$t_i$における日心赤道直交座標の小惑星の位置（$x_i, y_i, z_i$）

$$x_i = X_i + \Delta_i L_i, \tag{14}$$

$$y_i = Y_i + \Delta_i M_i, \tag{15}$$

$$z_i = Z_i + \Delta_i N_i, \tag{16}$$

を知らなくてはならない。ここで$\Delta_i$は観測地と小惑星の距離で、（$L_i, M_i, N_i$）は小惑星の測心方向余弦

$$L_i = \cos\delta_i \cos\alpha_i, \tag{17}$$
$$M_i = \cos\delta_i \sin\alpha_i, \tag{18}$$
$$N_i = \sin\delta_i, \tag{19}$$

である。観測から分かるのは小惑星の方向だけであり、$\Delta_i$を直接測ることはできない。観測地から目的の小惑星までの距離をいかに求めるかが軌道決定の本質である。長沢の方法では太陽の万有引力を受ける小惑星の運動方程式を使って近似的に求める。

それぞれの$t_i$における太陽と目的の小惑星の距離を$r_i$とすると、運動方程式を使って$\Delta_i$は$r_2$から近似的に求められる。導出は省略するが、$r_2$は$\Delta_i$との関係から得られる次の8次方程式を解くことで求められる。

$$f(r_2) = r_2^8 - (A^2 - 2AC + R_2^2)r_2^6 - 2B(A-C)r_2^3 - B^2 = 0, \tag{20}$$

ここで$A, B, C, R_2$は次の通りである。

$$A = -\frac{1}{t_{13}}(J_1 t_{32} + J_2 t_{13} + J_3 t_{21}), \tag{21}$$
$$B = -\frac{\mu}{6t_{13}}\left[J_1 t_{32}(t_{13}^2 - t_{32}^2) + J_3 t_{21}(t_{13}^2 - t_{21}^2)\right], \tag{22}$$
$$C = -(L_2 X_2 + M_2 Y_2 + N_2 Z_2), \tag{23}$$
$$R_2^2 = X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2, \tag{24}$$
$$t_{ij} = t_i - t_j, \tag{25}$$
$$J_i = \frac{\Gamma_1 X_i + \Gamma_2 Y_i + \Gamma_3 Z_i}{I}, \tag{26}$$
$$I = \Gamma_1 L_2 + \Gamma_2 M_2 + \Gamma_3 N_2, \tag{27}$$

$$\Gamma_1 = M_1 N_3 - N_1 M_3, \tag{28}$$
$$\Gamma_2 = N_1 L_3 - L_1 N_3, \tag{29}$$
$$\Gamma_3 = L_1 M_3 - M_1 L_3, \tag{30}$$

$\mu$は万有引力定数$G$と太陽質量の積で

$$\mu = 2.95912208 \times 10^{-4}[(\mathrm{AU})^3(\mathrm{day})^{-2}] \tag{31}$$

である。

式(20)の解は逐次的、もしくはExcelのソルバーを使って得ることができる。

ソルバーで$r_2$を動かして$f(r_2)$が0になるところを探すのは難しい場合があるので、$|f(r_2)|^2$が0付近で最低になるところを探すとよい。ただし、$r_2$の解は一つではないので、$r_2$の初期値を適切にとらないといけない。

$r_2$が求まれば次の式で$\Delta_i$を求めることができる。

$$\Delta_1 = \left| \frac{M_3 D - L_3 E}{\frac{c_1}{c_2} F} \right|, \tag{32}$$

$$\Delta_2 = A + \frac{B}{r_2^3}, \tag{33}$$

$$\Delta_3 = \left| \frac{M_1 D - L_1 E}{\frac{c_3}{c_2} F} \right|, \tag{34}$$

ここで

$$D = -\frac{c_1}{c_2} X_1 - X_2 - \frac{c_3}{c_2} X_3 - L_2 \Delta_2, \tag{35}$$

$$E = -\frac{c_1}{c_2} Y_1 - Y_2 - \frac{c_3}{c_2} Y_3 - M_2 \Delta_2, \tag{36}$$

$$F = L_1 M_3 - L_3 M_1, \tag{37}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{t_{32}}{t_{13}} \left[ 1 + \frac{\mu}{6 r_2^3} (t_{13}^2 - t_{32}^2) \right], \tag{38}$$

$$\frac{c_3}{c_2} = \frac{t_{21}}{t_{13}} \left[ 1 + \frac{\mu}{6 r_2^3} (t_{13}^2 - t_{21}^2) \right], \tag{39}$$

である。

式(20),(32),(33),(34)の導出では小惑星の座標を時刻差でテイラー展開し、高次の項を落として近似している部分がある。ここから逐次的に近似を良くしていくことができるが、時刻差が大きすぎると近似が悪くなって改良できない場合もある。

こうして得られた小惑星の位置$(x_i, y_i, z_i)$から軌道要素を計算することができる。詳しくは長谷川[5]、長沢[6]を参考にしてもらいたい。

## 参考文献


[1] 慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクト, “慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクト,” http://www.kitp.org/, (参照2016-03-27).

[2] 慶應義塾大学インターネット望遠鏡プロジェクト, “インターネット望遠鏡で観測! 現代天文学入門,” 森北出版 (2016) 160p.

[3] 福島 登志夫, “シリーズ現代の天文学13 天体の位置と運動,” 日本評論社 (2009) 258p.

[4] D. Teets and K. Whitehead, Mathematics Magazine **72**, 83 (1999).

[5] 長谷川 一郎, “天体軌道論 改訂版,” 恒星社厚生閣 (1986) 407p.

[6] 長沢 工, “軌道決定の原理-彗星・小惑星の観測方向から距離を決めるには,” 地人書館 (2003) 241p.

[7] Jet Propulsion Laboratory, “JPL Small-Body Database Browser,” http://ssd.jpl.nasa.gov/sbdb.cgi, (参照2016-04-01).